E.N.S.I. 1985 Option P

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, on note :

$\mathbb{R}$ l'ensemble des réels;

$\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls;

$\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels différents de zéro;

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels;

$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels différents de zéro.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie h désigne un réel strictement positif.

1. *a.* On désigne par α un réel quelconque et, pour α fixé, par f_α la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f_\alpha(x) = e^{-2x} - e^{-x+\alpha} - \alpha$$

On note (C_α) la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé du plan euclidien. Étudier, suivant les valeurs de α, les variations de f_α, et tracer (C_α) ; calculer en particulier $f_\alpha(-\alpha)$.

1. *b.* Soient α' et α'' deux réels tels que $\alpha' < \alpha''$. Étudier le signe de $f_{\alpha'}(x) - f_{\alpha''}(x)$ et en déduire la position relative des courbes $(C_{\alpha'})$ et $(C_{\alpha''})$.

1. *c.* Déterminer le nombre des racines réelles, puis des racines réelles strictement positives, de l'équation $f_h(x) = 0$.

1. *d.* Montrer qu'il existe un réel h_0, positif, tel que l'équation $f_{-h}(x) = 0$ possède deux racines réelles si $h \in]0, h_0[$ et n'en admet aucune si $h \in]h_0, +\infty[$.

En supposant que $h \in]0, h_0[$, préciser le nombre des racines strictement positives de l'équation $f_{-h}(x) = 0$.

2. On considère les deux fonctions réelles F_1 et F_2 de la variable réelle x, respectivement définies par :

$$F_1(x) = 1 - e^{-x} \text{ si } x \geqslant 0, \qquad F_1(x) = 0 \text{ si } x < 0,$$
$$F_2(x) = 1 - e^{-2x} \text{ si } x \geqslant 0, \qquad F_2(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

2. *a.* Construire, dans un repère orthonormé du plan euclidien, les courbes représentatives $(\mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{F}_2)$ de F_1 et F_2. Ces fonctions sont-elles continues et dérivables sur $\mathbb{R}$?

2. *b.* Soient y_h et z_h les deux fonctions réelles de la variable réelle x respectivement définies par :

$$y_h(x) = F_1(x + h) + h - F_2(x),$$
$$z_h(x) = F_1(x - h) - h - F_2(x),$$

Ces fonctions sont-elles continues sur $\mathbb{R}$? Expliciter y_h et z_h pour tout x.

2. *c.* Étudier, lorsque x varie dans $\mathbb{R}$, le signe de $z_h(x)$.

2. *d.* Construire, dans un même repère orthonormé du plan euclidien, les courbes représentatives de $y_{\frac{1}{8}}$ et $z_{\frac{1}{8}}$.

2. *e.* Déterminer l'ensemble des réels h (strictement positifs) tels que l'on ait, pour tout x :

$$F_1(x - h) - h \leqslant F_2(x) \leqslant F_1(x + h) + h$$

DEUXIÈME PARTIE

$\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies sur $\mathbb{R}$, à dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$.

1. *a.* Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $y \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})$. Déterminer, suivant les valeurs de α et de β, l'intégrale générale de l'équation différentielle :

$$(E)\ y'' - \alpha^2 y = e^{\beta x}.$$

1. *b.* Déterminer celle des solutions de (E), que l'on notera $f_{\alpha,\beta}$, qui s'annule, ainsi que sa dérivée, pour $x = 0$, c'est-à-dire telle que $f_{\alpha,\beta}(0) = f'_{\alpha,\beta}(0) = 0$.

2. *a.* x et β étant fixés dans $\mathbb{R}$, étudier la continuité de l'application Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\alpha \longmapsto \Phi(\alpha) = f_{\alpha,\beta}(x)$$

2. *b.* Dans le cas où $\beta = 0$, la fonction Φ est-elle indéfiniment dérivable ?

TROISIÈME PARTIE

On note, si elle existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes :

$\forall n \in \mathbb{N}$, y_n est une fonction de $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$;

$\forall n \in \mathbb{N}$, y_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$;

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} y_n(x)e^{nx} = 1$;

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y''_n - n^2 y_n = -y_{n-1}$;

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) = 1$.

Montrer qu'il existe une suite unique $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions précédentes et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad y_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_{p,n}\, e^{-px}$$

Exprimer $\alpha_{p,n}$ en fonction de p et de n.